Chapitre 19 : Applications linéaires

Applications linéaires

Exercice 1: Dire si les applications suivantes sont linéaires ou non:

1. $f : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x+y \end{array} \right.$
2. $g : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x+y+5 \end{array} \right.$
3. $h : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t \end{array} \right.$
4. $\varphi : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K} \\ P & \mapsto & P(0)+P(1) \end{array} \right.$
5. $\psi : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{C}) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \mathrm{Re}(f(0)) \end{array} \right.$
6. $\gamma : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{R}^2 \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & (u_1,u_0) \end{array} \right.$

Noyau et image d'une application linéaire

Exercice 2: Soit $f : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z,t) \mapsto (x+y,0,z,z) \end{array} \right.$

1. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et donner en une base.
2. Déterminer $\mathrm{Im}(f)$ et donner en une base.

Exercice 3: Soient f et g deux endomorphismes de E. Montrer que

$$g \circ f = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g).$$

Exercice 4: Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2)$.
2. Montrer que $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$.
3. Conjecturer puis démontrer une généralisation de ce résultat.

Exercice 5: [*] Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Soit G un sous-espace vectoriel de E. Soit $A = \{u \in \mathscr{L}(E),\ G \subset \mathrm{Ker}(u)\}$.
Montrer que A est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$.

Exercice 6: Soit $\Gamma : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \to & \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & f''-2f'+f \end{array} \right.$

1. Montrer que Γ est un endomorphisme de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
2. Déterminer son noyau. Γ est-il un endomorphisme injectif ?

Exercice 7: Soit $f : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+2y,x-y) \end{array} \right.$
Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 8: Soit $f : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & P(X+1)-P(X-1)-2P(X) \end{array} \right.$
Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 9: On considère l'application $\Phi : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ P & \longmapsto & (P(1),P'(1),P''(1)) \end{array} \right.$.

1. Démontrer que Φ est une application linéaire et calculer $\mathrm{Ker}(\Phi)$.
2. En déduire que Φ est un isomorphisme.

Composition d'endomorphismes

Exercice 10: Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soit $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u^3 = 0$.
Montrer que $\mathrm{id}_E - u$ est bijective et donner sa bijection réciproque.

Exercice 11: Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.
Montrer que $\mathrm{Ker}(f-\mathrm{id}_E) \subset \mathrm{Ker}(f^2-\mathrm{id}_E)$ et que $\mathrm{Ker}(f+\mathrm{id}_E) \subset \mathrm{Ker}(f^2-\mathrm{id}_E)$.

Exercice 12: Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, $u \neq 0$ tel que

$$\exists\, n \in \mathbb{N}^*,\ u^n = 0 \text{ et } u^{n-1} \neq 0$$

On dit que u est un endomorphisme nilpotent d'indice de nilpotence n.

1. Soit $x \in E$ tel que $u^{n-1}(x) \neq 0_E$.
   Montrer que la famille $(x, u(x), u^2(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est libre.
2. Montrer que u n'est pas injectif. u est-il surjectif?
3. Factoriser $\mathrm{id}_E - u^n$, puis en déduire que $\mathrm{id}_E - u$ est un automorphisme de E.

Projections et symétries

Exercice 13: Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto \frac{1}{3}(-x+2y,-2x+4y) \end{cases}$
Montrer que f est la bîîîîp par rapport à bîîîîp parallèlement à bîîîîp.

Exercice 14: Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit p un projecteur de E.

1. Montrer que $q = \mathrm{id}_E - p$ est aussi un projecteur de E.
2. Comparer $\mathrm{Ker}(p)$, $\mathrm{Ker}(q)$, $\mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Im}(q)$.

Exercice 15: Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Pour chaque condition, déterminer les projecteurs p de E la vérifiant.
1. $2p$ est un projecteur 2. $2\mathrm{id}_E - p$ est un projecteur 3. $\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Im}(p)$

Exercice 16: Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^2 - 3f + 2\mathrm{id}_E = 0$.

1. Montrer que $f - \mathrm{id}_E$ et $2\mathrm{id}_E - f$ sont des projecteurs.
2. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(2\mathrm{id}_E - f)$.

Exercice 17: On considère les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$H = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x+y+z = 0\right\} \text{ et } L = \mathrm{Vect}\left((1,2,3)\right)$$

Démontrer que $\mathbb{R}^3 = H \oplus L$. Déterminer ensuite l'image d'un vecteur de $\mathbb{R}^3$ par la symétrie par rapport à H parallèlement à L.

Exercice 18: On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E des fonctions deux fois dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On pose :

$$F = \{f \in E \;/\; f'' = f\} \qquad G = \{f \in E \;/\; f(0) = f'(0) = 0\}$$

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
2. Déterminer une base de F.
3. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E.
4. On note π la projection sur F de direction G.
   Exprimer simplement $\pi(f)$, pour tout $f \in E$.

Théorème du rang

Exercice 19: Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u^3 = 0$. Montrer que $\mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(u^2) \leqslant \dim(E)$

Exercice 20: Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
Soit $(f,g) \in \mathscr{L}(E)^2$ tel que $f+g$ soit bijectif et $g \circ f = 0$.

1. Montrer que $\mathrm{rg}(f) \leqslant \dim(E) - \mathrm{rg}(g)$.
2. Montrer que, pour f et g quelconques, $\mathrm{rg}(f+g) \leqslant \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$.
3. En déduire que $\dim(E) = \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$.

Exercice 21: Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et soient f et g deux endomorphismes de E tels que $E = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g) = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Ker}(g)$. Démontrer que $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) = \dim(E)$. En déduire que les sommes ci-dessus sont des sommes directes.

Équations linéaires

Exercice 22: Déterminer l'ensemble des solutions des problèmes suivants en les considérant comme des équations linéaires.

$$(E_1) : \begin{cases} x+y+z &= 1 \\ 2x-y+3z &= 2 \\ 3x-3y+5z &= 3 \end{cases} \qquad (E_2) : y''-y = \mathrm{ch}(x) \qquad (E_3) : u_{n+2} = -2(u_{n+1}+u_n+1)$$

Les équations (E_1), (E_2) et (E_3) sont d'inconnues $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $y \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ respectivement.

Exercice 23: Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts.
Montrer que si $b_0, b_1, \ldots, b_n$ sont $n+1$ réels quelconques, alors il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall i \in [\![0;n]\!]$, $P(a_i) = b_i$.

Formes linéaires et hyperplans

Exercice 24:
Soit H l'ensemble des fonctions $f \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ telles que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 0$.
Montrer que H est un hyperplan de $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$, et en donner un supplémentaire.